15/4/2020 / 7ο online μάθημα

ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

- Διατύπωση της στατιστικής υπόθεσης για την άγνωστη παράμετρο.
- Ανάπτυξη μεθοδολογιών που στηρίζονται στο τ.δ. για τον έλεγχο της υπόθεσης.
- Εξαγωγή συμπερασμάτων για την ορθότητα ή μη της διατυπωθείσας υπόθεσης.
- Η υπόθεση η οποία ορίζεται με την ελπίδα να απορριφθεί* (θα δούμε παρακάτω γιατί) λέγεται μηδενική υπόθεση. H_0. Η αντίθετη της ονομάζεται εναλλακτική H_1 ή H_a.

Η όλη διαδικασία για την απόφαση, για την ορθότητα ή μη της H_0 ονομάζεται στατιστικό τεστ.

* θα δούμε παρακάτω γιατί.

Βήματα

1ο Βήμα: Εύρεση μιας στατιστικής συνάρτησης με γνωστή κατανομή όταν αληθεύει η H_0. Ονομάζεται στατιστική συνάρτηση.

2ο Βήμα: Κατασκευή της περιοχής απόρριψης ή κρίσιμης περιοχής δηλαδή ενός υποσυνόλου τιμών της σ.σ. που θα απορρίπτεται η H_0.

Παράδειγμα από Καθημερινότητα για κατανόηση

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΣ

ΦΥΣΗ		Αποδ H_0	Απορ. H_0
	Αληθής H_0	—	ΣΦΑΛΜΑ ΤΥΠΟΥ I
	Αληθής H_a	ΣΦΑΛΜΑ ΤΥΠΟΥ II	—

$\alpha = P(\text{σφάλμα τύπου I}) \Rightarrow$

$\alpha = P(\underset{\text{στατιστικός}}{\text{απορρίπτω } H_0} \mid \underset{\text{φύση}}{H_0 \text{ αληθής}})$

$\alpha \downarrow$ επίπεδο σημαντικότητας

$\beta = P(\text{σφάλμα τύπου II}) \Rightarrow$

$\beta = P(\text{αποδέχομαι } H_0 \mid H_a \text{ αληθής})$

1 - P(αποδ H_0 | H_a αληθής)

$\gamma = \text{ισχύς} = 1 - \beta \Rightarrow$

$\gamma = P(\text{απορ. } H_0 \mid H_a \text{ αληθής})$

$P(A') = 1 - P(A)$

Τι θα θέλαμε;

Θα θέλαμε τα α, β όσο το δυνατό μικρότερα.

Δυστυχώς δεν είναι εφικτή η ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση των α, β

Λύση: Σταθεροποιώ το α (εκ των προτέρων) και ψάχνω ελέγχους που ελαχιστοποιούν το β ή μεγιστοποιούν το $1-\beta=\gamma \rightarrow$ ισχύς

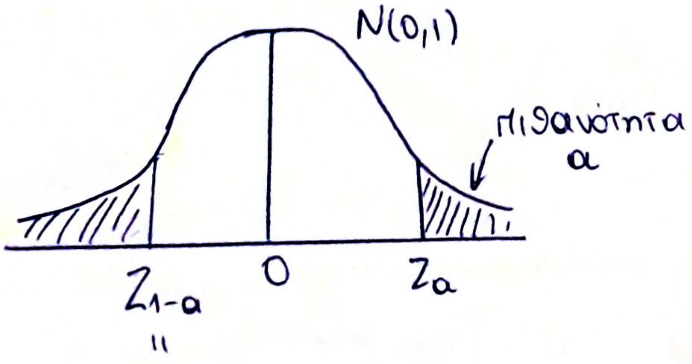
Για αυτό συνήθως $\alpha = 5\%$ ή 1% ή 10%

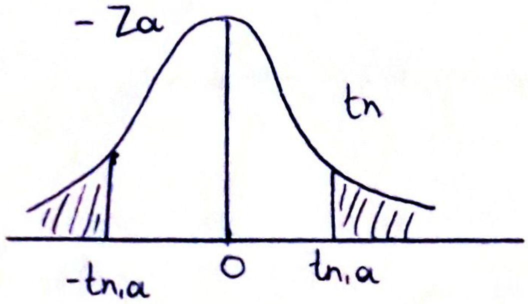
δηλαδή τι σταθεροποιώ; $\mu = 300$ $\mu > 300$ ή $\mu < 300$ ή $\mu \neq 300$

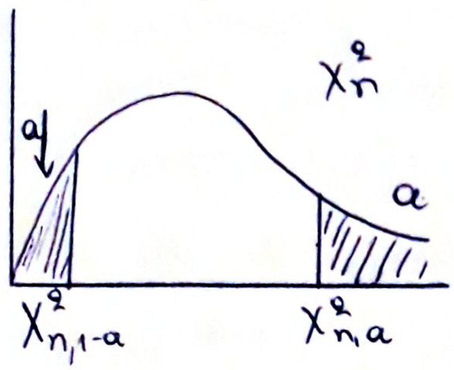
Σταθεροποιώ την $\underset{5\%}{\alpha} = P(\text{απορ. } H_0 \mid \underset{\text{στατ.}}{H_0} \text{ αληθής})$

Άρα όταν απορρίπτεται η H_0 ξέρω ποια είναι η πιθανότητα σφάλματος. Άρα για αυτό θέλω να την απορρίπτω (βλέπε προηγούμενα - p-τιμή ενός τεστ είναι η μικρότερη τιμή του α για την οποία απορρίπτεται η H_0.

Αν π.χ. p-τιμή ≤ 0.05 τότε με επίπεδο σημαντικότητας 0.05 η H_0 απορρίπτεται. Από προηγούμενη διάλεξη:







Έλεγχος μ κανονικού

$H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 γνωστός αριθμός)

$H_a: \mu > \mu_0$ ή $\mu < \mu_0$ ή $\mu \neq \mu_0$

Δύο περιπτώσεις (Αποδεικνύονται με όσα έχουμε δει)

- σ^2 γνωστό

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

- σ^2 άγνωστο

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

Περιοχές απόρριψης (Διαισθητική ερμηνεία)

- $Z \geq Z_a$ ή $Z \leq -Z_a$ ή $|Z| \geq Z_{a/2}$
- $t \geq t_{n-1,a}$ ή $t \leq -t_{n-1,a}$ ή $|t| \geq t_{n-1,a/2}$

Έλεγχος για διωνυμικό p

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{\text{προσεγ.}}{\underset{H_0}{\sim}} N(0,1)$$

$H_0: p = p_0$ (γνωστό ποσοστό)

$H_a: p > p_0$ ή $p < p_0$ ή $p \neq p_0$

Περιοχή απόρριψης

$Z \geq Z_a$ ή $Z \leq -Z_a$ ή $|Z| \geq Z_{a/2}$

Δύο μέσες τιμές κανονικών

$H_0: \mu_X = \mu_Y$

$H_a: \mu_X > \mu_Y$ ή $\mu_X < \mu_Y$ ή $\mu_X \neq \mu_Y$

I. ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

- σ_X^2, σ_Y^2 γνωστές

Δ.Ε.

Τότε $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

Άρα όταν $H_0: \mu_X = \mu_Y$

$$Z = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

Περιοχή απόρριψης

$Z \geq Z_a$ ή $Z \leq -Z_a$ ή $|Z| \geq Z_{a/2}$

- σ_X^2, σ_Y^2 άγνωστες, αλλά ίσες.

Τότε: $$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}$$

Ενώ

$$t=\frac{(\bar{x}-\bar{y})}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \overset{H_0}{\sim} t_{n+m-2}$$

(Βλέπε προηγούμενες διαλέξεις)

<u>Περιοχή απόρριψης</u>

$t \geq t_{n+m-2,\alpha}$ ή $t \leq -t_{n+m-2,\alpha}$ ή $|t| \geq t_{n+m-2,\alpha/2}$ αντίστοιχα.

<u>II. ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ</u>

$$\left.\begin{array}{l} X_1,\dots,X_n \sim N(\mu_x,\sigma_x^2) \\ Y_1,\dots,Y_n \sim N(\mu_y,\sigma_y^2) \end{array}\right\} \text{ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΑ.}$$

$D_i = X_i - Y_i \quad i=1,\dots,n$ από $N(\mu_x-\mu_y=\mu_\Delta,\ \sigma_\Delta^2)$

Άρα $H_0: \mu_x=\mu_y$ ισοδύναμα

$H_0: \mu_\Delta = 0$

$H_a: \mu_\Delta > 0$ ή $\mu_\Delta < 0$ ή $\mu_\Delta \neq 0$

$$t=\frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

<u>Περιοχή απόρριψης</u>

$t \geq t_{n-1,\alpha}$ ή $t \leq -t_{n-1,\alpha}$ ή $|t| \geq t_{n-1,\alpha/2}$